Augmented quandle and crossed module of a knotted surface exterior

大阪大学大学院　理学研究科　数学専攻
三木 亮介 (Ryosuke MIKI) *

概 要

S^3(または $\mathbb{R}^3$) 内に埋め込まれた円周のことを結び目といい、有限個の非交和を絡み目という。また R^4 内に埋め込まれた連結閉曲面を曲面結び目といい、有限個の非交和を曲面絡み目という。J.F.Martins は crossed module という道具を用いて曲面結び目外部の性質の研究を行った。その研究においては、fundamental crossed module と呼ばれるものが重要な役割を果たした。本講演では、fundamental crossed module とカンドルの関係に着目し、一部をカンドルとして実現できたことを述べる。

1　導入

1.1　結び目と曲面結び目

定義 1.1　(結び目・絡み目)
3 次元球面 S^3 (または $\mathbb{R}^3$) に埋め込まれた円周 S^1 のことを**結び目**といい、結び目の有限個の非交和を**絡み目**という。特に、円板を張る結び目を**自明な結び目**、自明な結び目の有限個の非交和を**自明な絡み目**という。

L を S^3 内の絡み目とする。
L と S^3 内の全同位で移り合う絡み目は**同値**であるという。結び目理論の主目標は同値な結び目を分類することである。分類のために用いられるものが不変量である。現在では、結び目不変量は多項式型のものなど、数多く発見・研究されている。

L を平面に射影し、その際に上下の情報を加えたものを結び目の**ダイアグラム**という。

定義 1.2　(バンドとバンド手術)
S^3 内の絡み目 L に対し、L に接着する 2 次元 1-ハンドル B のことを**バンド**という。つまり、B は S^3 に埋め込まれた円板で $L \cap B = A_1 \cup A_2$ (ここで A_1、A_2 は $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ を満たすアーク) となるものである。$L' := (L \cup \partial B) \setminus (\mathrm{IntA}_1 \cup \mathrm{IntA}_2)$ は絡み目になり、この L' を L からバンド B に沿う**バンド手術**により得られる絡み目という。

*E-mail:u504176e@ecs.osaka-u.ac.jp

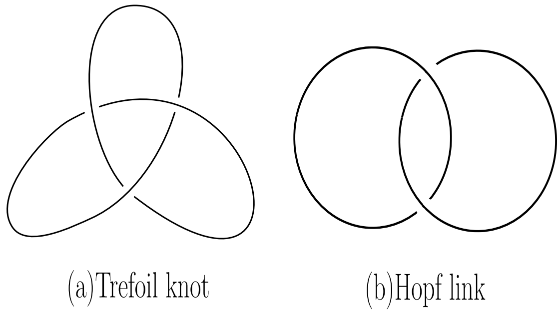

図 1: 結び目と絡み目の例

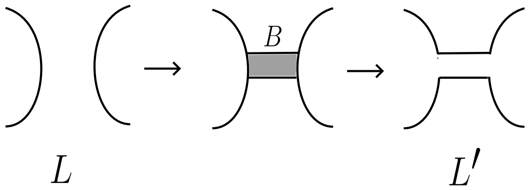

図 2: バンド手術

定義 1.3 （曲面結び目・曲面絡み目）
4 次元球面 S^4（または $\mathbb{R}^4$）内に埋め込まれた連結閉曲面を**曲面結び目**といい、曲面結び目の有限個の非交和を**曲面絡み目**という。

次に曲面絡み目の表示方法の１つを述べる。
$\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ とみなして、$\mathbb{R}$ を時間軸と考える。各時間においての切り口である $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ を考える。$\mathbb{R}^4$ に埋め込まれた曲面絡み目 Σ はこの切り口 $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ 内の結び目の列として解釈することができる。この結び目の列を**モーション・ピクチャー**という。例えば、図 3 は spun trefoil と呼ばれる 2 次元結び目のモーション・ピクチャーである。

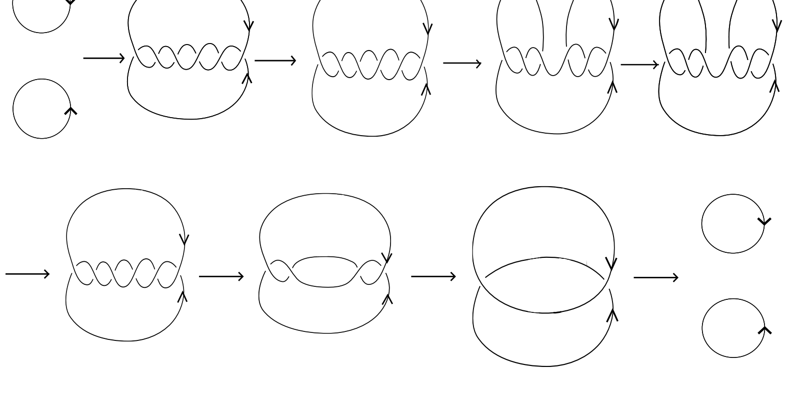

図 3: spun trefoil

1.2 Crossed module

定義 1.4 (crossed module)
crossed module は 2 つの群 G と E、群準同型 $\partial : E \to G$、そして群 G の E への右作用 $\triangleleft$ の 4 つ組 $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleleft)$ で、次の条件を満たすものである。

(i) $\partial(a \triangleleft X) = X^{-1}\partial(a)X \quad (\forall X \in G, \forall a \in E)$

(ii) $a \triangleleft \partial(b) = b^{-1}ab \quad (\forall a, b \in E)$

crossed module の基本的な例は fundamental crossed module である。

例 1.1 (fungamental crossed module)
(M, N) を弧状連結な空間対とし基点 p を N 内にとるとする。
$\partial : \pi_2(M, N, p) \to \pi_1(N, p)$ を境界写像、$\pi_1(N, p)$ の $\pi_2(M, N, p)$ への作用 $\triangleleft$ を自然な作用とする。
このとき、$(\pi_1(N, p), \pi_2(M, N, p), \partial, \triangleleft)$ は crossed module になり、$\Pi_2(M, N, p)$ と書く。
これは (M, N, p) 上の **fundamental crossed module** と呼ばれる。

また、具体例として次のものが知られている。

例 1.2 G を群とし、E を G の正規部分群とする。このとき、$\partial : E \to G$ を包含写像、作用 $\triangleleft$ を $a \triangleleft X := X^{-1}aX$ で定めると、$(G, E, \partial, \triangleleft)$ は crossed module になる。

1.3 カンドル

定義 1.5 (カンドル)
カンドルとは集合 Q に二項演算 $*$ を備えたもので、次の条件を満たすものである。

(i) $a * a = a \quad (\forall a \in Q)$

(ii) $\forall a \in Q,\ S_b : Q \to Q, a \mapsto a * b$ は全単射

(iii) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad (\forall a, b, c \in Q)$

上記カンドルの 3 つの公理は結び目のライデマイスター変形と呼ばれる基本変形に対応しており、結び目理論とカンドルは相性が良いことが知られる。結び目理論でよく現れるカンドルは次のものである。

例 1.3 (結び目カンドル)
K を R^3 内の結び目とし、M を K の外部(つまり R^3 から K の開管状近傍をのぞいたもの)とし、基点 p を外部内にとる。このとき、pathγ を始点が ∂M 上にあり、終点が p である path とする。この path のホモトピー類を $Q(K, p)$ とする。このときメリディアン円板を用いて $Q(K, p)$ に二項演算 $*$ を

$$\gamma_1 * \gamma_2 := \gamma_1\gamma_2^{-1}(\partial D_2)\gamma_2$$

で定める(∂D には K から見て右手系の向きを入れる)。(図 4)

この演算において $Q(K, p)$ はカンドルになる。このカンドルを**結び目カンドル**という。

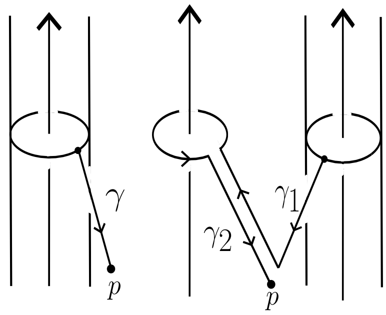

図 4: 結び目カンドルの元と演算

例 1.4 （共役カンドル）
G を群とする。このとき、G に二項演算を $a * b := b^{-1}ab$ で定めるとカンドルになる。このカンドルを Conj(G) で表し、**共役カンドル**という。

定義 1.6 （augmented quandle）
E を集合とし、群 G が右から作用しているとする。写像 $\partial : E \to G$ が

(i) $\partial(a \triangleleft X) = X^{-1}\partial(a)X \quad (\forall X \in G, \forall a \in E)$

(ii) $a \triangleleft \partial(a) = a \quad (\forall a \in E)$

を満たしていると仮定する。このとき E に二項演算を $a * b := a \triangleleft \partial(b)$ で定めることができ、E はカンドルになる。このカンドル E を **augmented quandle** という。

注 1.1 crossed module が与えられると、自然に群を共役カンドルと見做すことで augmented quandle だと思うことが可能である。つまり、$\{$crossed modules$\} \subset \{$augmented quandles$\}$ が成立する。

注 1.2 結び目カンドルは augmented quandle である。$Q(K,p)$ には $\pi_1(M,p)$ が path の合成という形で右から作用している。また、写像 $\partial : Q(K,p) \to \pi_1(M,p)$ を $\partial(\gamma) = \gamma^{-1}(\partial D)\gamma$ で定めている。

定義 1.7 （カンドル準同型）
G と E をカンドルとする。写像 $f : E \to G$ が $f(x *_E y) = f(x) *_G f(y)$ を満たすとき**カンドル準同型**という。

また、カンドルから群を作る方法が知られている。

定義 1.8 （付随群）
Q をカンドルとする。群 $\langle a\ (a \in Q) \mid a * b = b^{-1}ab(a, b \in Q)\rangle$ を**付随群**といい、$As(Q)$ で表す。

2　先行研究

ここでは、J.F.Martins による [2]、[3] での先行研究と関連する事実について述べる。

Σ を $S^4 = D^4_- \cup S^3 \times [-2,2] \cup D^4_+$（$D^4_-, D^4_+$ は 4 次元球体）内の曲面絡み目で $S^3 \times [-2,2]$ 内にあると仮定する。また、M を Σ の外部とする、すなわち $N(\Sigma)$ を Σ のチューブ近傍とすると $M = \mathrm{cl}(S^4 \setminus N(\Sigma))$ である。

$h: S^3 \times [-2,2] \to [-2,2]$ を高さ関数と考え、Σ を動かし $h|_\Sigma$ がモース関数となるようにし、Σ にハンドル分解を与えて固定する。Σ のハンドル分解は M のハンドル分解を誘導する。このとき、D^4_- が 4 次元 0-ハンドル、D^4_+ が 4 次元 4-ハンドルになる。4 次元 1、2、3-ハンドルに関しては下の様に対応し、同時に取り付けが行われることが知られている。

$$\Sigma \text{ の 2 次元 0-ハンドル} \longleftrightarrow M \text{ の 4 次元 1-ハンドル}$$

$$\Sigma \text{ の 2 次元 1-ハンドル} \longleftrightarrow M \text{ の 4 次元 2-ハンドル}$$

$$\Sigma \text{ の 2 次元 2-ハンドル} \longleftrightarrow M \text{ の 4 次元 3-ハンドル}$$

Σ の各ハンドルはモーション・ピクチャーにおいて図 5 の様に対応し、それぞれ「birth of circles」、「saddle points」、「death of circles」と呼ばれる。

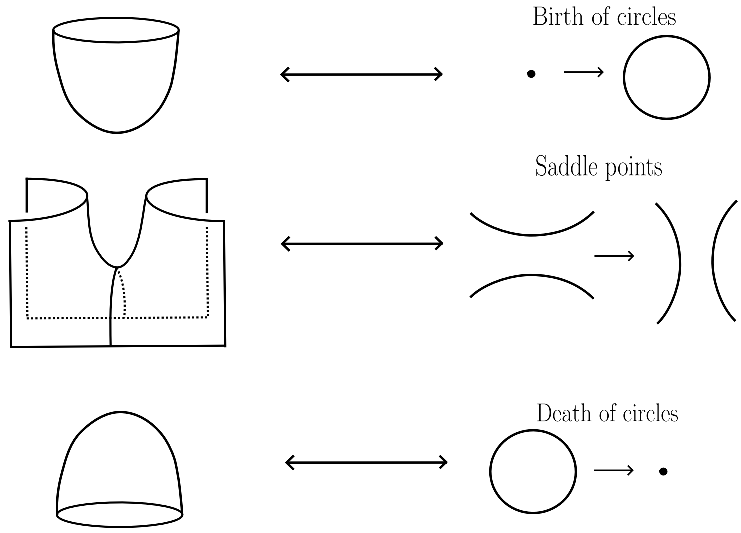

図 5: ハンドルとモーション・ピクチャー

また曲面絡み目に対しては次の定理がよく知られている。

定理 2.1 任意の S^4 内の曲面絡み目を全同位で変形し、全ての極小点 (birth of circles) が $t=-1$、全ての鞍点 (saddle point) が $t=0$、全ての極大点 (death of circles) が $t=1$ にあるようにできる。

以降、曲面絡み目はこの定理の条件を満たすとする。M^1 を M の全ての 0、1-ハンドルから成るハンドル体とする。また M の 4 次元 0-ハンドル内に基点 p をとる。

特に saddle point はバンドで記録でき (ただしここでのバンドの付け方はセクション 2 での流儀と少し異なる)、便宜上バンドのコアに向きと名前を与えておく。（図 6 上）
バンドは $\pi_2(M^2, M^1, p)$ の元を表すことができる。ここでバンドの中心線に向きを付け、境界である $\pi_1(M^1, p)$ の元 $\partial(e)$ には右手系に向きをとる。（図 6 左下）
境界 $\partial(e)$ に関する条件は、saddle point 通過前のアークから読み取ることができる。例えば、図 6 右下の様なケースでは $\partial(e) = Y^{-1}X$ となる。ここで X, Y は対応する名のアークのメリディ

アンを右手系に回る $\pi_1(M^1,p)$ の元を表す。

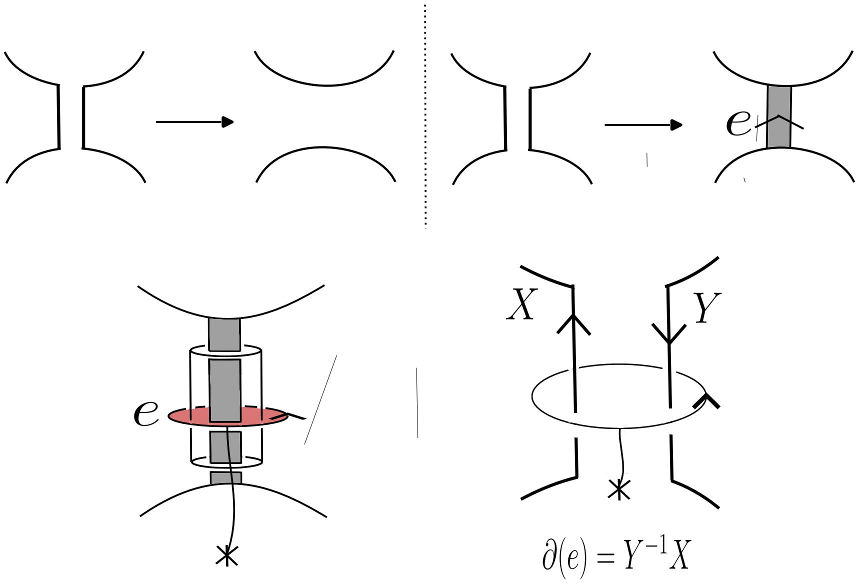

図 6: $\pi_2(M^2,M^1,p)$ の元と境界

命題 2.1 ([2] proposition2.3) バンドで代表される $\pi_2(M^2,M^1,p)$ の元、アークで代表される $\pi_1(M^1,p)$ の元の間には図 7 の様な関係が入る。

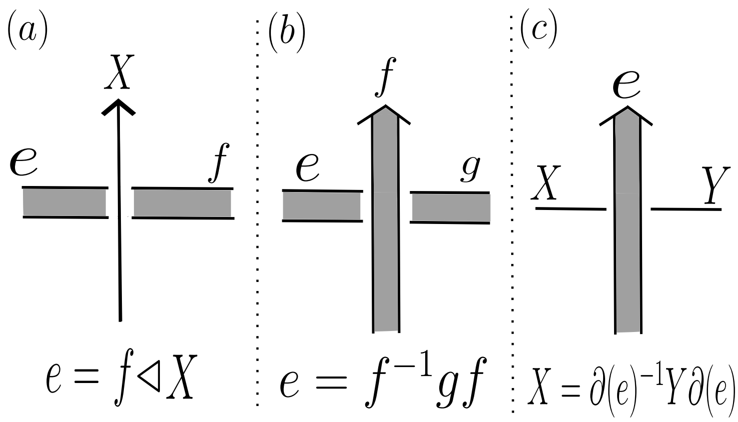

図 7: $\pi_2(M^2,M^1,p)$ と $\pi_1(M^1,p)$ の元の間の関係

3 主結果

ここでは主結果について紹介する。本研究では、固定したハンドル分解 h に対し $Q_2(M^2(h),M^1(h),p)$ というカンドルを構成し、$\pi_2(M^2(h),M^1(h),p)$ との関係を調べた。

モーション・ピクチャーの t=0 におけるバンドにラベル付けをし、対応する M の 4 次元 2-ハンドルにも同じラベルを付ける。またバンドの中心線に与えた向きと同じ向きをハンドルの core にも与える。t=0 に仮の基点 p' をとり、始点が p' であり終点が p である直進する path を l とする。次に、始点が 2-ハンドルの接着領域にあり、終点が p' である path を l_a（a はハンドルのラベル）とする。$\gamma_a := l_a l$ とおく。$Q_2(M^2(h), M^1(h), p)$ を 2-ハンドルに対する γ のホモトピー類全体とする。

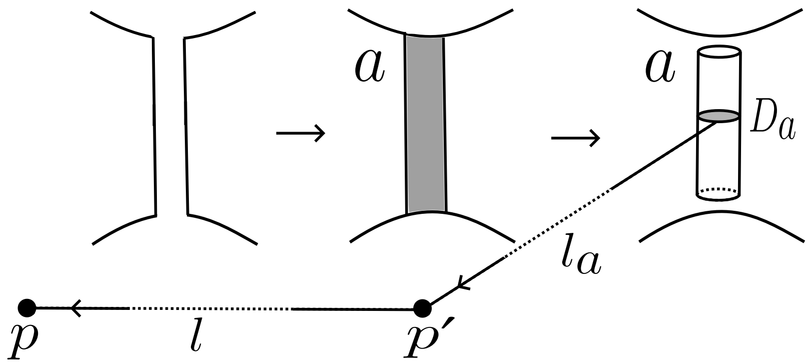

図 8: $Q_2(M^2(h), M^1(h), p)$ の元

l_a の始点で時刻 t におけるハンドルを切断し、現れる円板を D_a とし、境界 ∂D_a には core の向きから見て右手系に向きを与える。
このとき、$Q_2(M^2(h), M^1(h), p)$ には $\pi_1(M^1(h), p)$ が path の合成という形で右から作用している。また、写像 $\partial : Q_2(M^2(h), M^1(h), p) \to \pi_1(M^1(h), p)$ を $\partial(\gamma_a) = \gamma_a^{-1}(\partial D_a)\gamma_a$ で定めると、$Q_2(M^2(h), M^1(h), p)$ は augmented quandle になる。このとき、二項演算は

$$\gamma_a * \gamma_b := \gamma_a \gamma_b^{-1}(\partial D_b)\gamma_b$$

で定めている。(図 9)

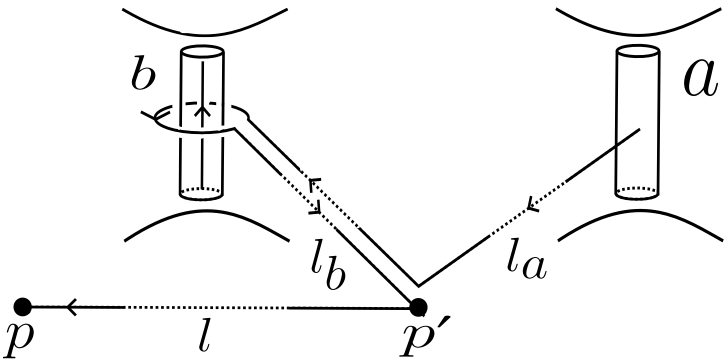

図 9: $Q_2(M^2(h), M^1(h), p)$ の演算

ここで次を示すことができた。証明は [5] の proposition3.2 と全く同じである。

定理 3.1 $As(Q_2(M^2(h), M^1(h), p))$ は $\pi_2(M^2(h), M^1(h), p)$ と同型である。

これにより、fundamental crossed module $\partial : \pi_2(M^2(h), M^1(h), p) \to \pi_1(M^1(h), p)$ を augmented quandle として実現できた。今後の目標はさらに拡張し、quandle crossed module として実現することである。最後に、この quandle crossed module の定義を述べて終わりにする。

定義 3.1 ([6] definition2.8 & 2.11)(quandle action)
G と E をカンドル、$\triangleleft : E \times G \to E$ が G の E への自己同型による **quandle action** であるとは次の 3 条件を満たすことである。

(i) $(a \triangleleft X) \triangleleft Y = (a \triangleleft Y) \triangleleft (X *_G Y) \quad (\forall X, Y \in G, \forall a \in E)$

(ii) $(a *_E b) \triangleleft X = (a \triangleleft X) *_E (b \triangleleft X) \quad (\forall X \in G, \forall a, b \in E)$

(iii) $\forall X \in G,\ F_X : E \to E, a \mapsto a \triangleleft X$ は全単射

定義 3.2 ([6] definition2.14)(quandle crossed module)
G と E をカンドル、$\partial : E \to G$ をカンドル準同型、$\triangleleft$ を右からの G の E への quandle action、とする。$\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleleft)$ が **quandle crossed module** であるとは次の 3 条件を満たすことである。

(i) $\partial(a \triangleleft X) = \partial(a) *_G X \quad (\forall X \in G, \forall a \in E)$

(ii) $a \triangleleft \partial(b) = a *_E b \quad (\forall a, b \in E)$

注 3.1 {crossed modules} $\subset$ {augmented quandles} $\subset$ {quandle crossed modules} が成立する。

参考文献

[1] J.S.Cartar,S.Kamada,M.Saito.: Surface in 4-space,Encyclopedia of Mathematical Science,142, Low-Dimensional Topology, III, SpringerVerlag, Berlin, 2004

[2] João Faria Martins.: The fundamental crossed module of the complement of a knotted surface. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 361, No. 9, pp. 4593-4630, 2009.

[3] João Faria Martins.: On 2-dimensional homotopy invariants of complements of knotted surfaces. arXiv preprint math/0507239, 2005.

[4] Robert E Gompf and Stipsicz.: 4-manifolds and Kirby calculus, Vol. 20. American Mathematical Society, 2023.

[5] Roger Fenn, and Colin Rourke.: Racks and links in codimension two, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol.1, No,4, pp.343-406, 1992

[6] Alissa S. Crans and Friedrich Wagemann.: Crossed modules of racks, Homology, Homotopy and Applications Vol.16, No,2, pp.85-106, 2014